(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 27.01.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**

1. **a)** Dati su skupovi $A = \{a, b\}$ i $B = \{1, 2\}$. Odrediti sve binarne relacije iz A u B. Koje od napisanih relacija su funkcije (preslikavanja)? Koje od napisanih funkcija su bijekcije?

b) Dat je polinom $f(x) = (b - a)x^n + 2^n a - b$, $a, b \in \mathbb{C}$. Odrediti a i b tako da ostatak pri djeljenju polinoma $f(x)$ sa $x^2 - 3x + 2$ bude $(2^n - 1)x$.

2. Neka je $S = \{(1, a) : a \in \mathbb{Q}\}$ i neka je na S definisana binarna operacija zvjezdica $*$ sa $(1, a) * (1, b) = (\alpha, a + b + 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
a) Odrediti vrijednost parametra α tako da skup S bude zatvoren u odnosu na operaciju $*$.
b) Za dobijenu vrijednost parametra α pokazati da je $(S, *)$ grupa. Da li je grupa Abelova?

3. Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra λ:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 \qquad - x_4 + 2x_5 &= 1 \\
x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2 \\
6x_1 \qquad - x_3 \qquad - 2x_5 &= 3 \\
4x_1 \qquad - x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= \lambda
\end{aligned}.$$

4. Odrediti t tako da matrica $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & t \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ ima svojstvenu vrijednost jednaku 3.
Za dobijeno t odrediti ostale svojstvene vrijednosti matrice M i svojstvene vektore.

(#) Dati su skupovi $A=\{a,b\}$ i $B=\{1,2\}$. Odrediti sve binarne relacije iz A u B. Koje od napisanih relacija su f-je (preslikavanja)? Koje od napisanih f-ja su bijekcije?

Rj.

$A\times B=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$

Binarna relacija je podskup od $A\times B$.

Binarne relacije ću označiti sa $\rho_1, \rho_2, \dots$

Binarne relacije su

$\rho_1=\emptyset$

$\rho_2=\{(a,1)\}$

$\rho_3=\{(a,2)\}$

$\rho_4=\{(b,1)\}$

$\rho_5=\{(b,2)\}$

$\rho_6=\{(a,1),(a,2)\}$

$\rho_7=\{(a,1),(b,1)\}$

$\rho_8=\{(a,1),(b,2)\}$

$\rho_9=\{(a,2),(b,1)\}$

$\rho_{10}=\{(a,2),(b,2)\}$

$\rho_{11}=\{(b,1),(b,2)\}$

$\rho_{12}=\{(a,1),(a,2),(b,1)\}$

$\rho_{13}=\{(a,1),(a,2),(b,2)\}$

$\rho_{14}=\{(a,1),(b,1),(b,2)\}$

$\rho_{15}=\{(a,2),(b,1),(b,2)\}$

$\rho_{16}=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$

F-je (preslikavanja) su: $\rho_7, \rho_8, \rho_9, \rho_{10}$.

Bijekcije su: ρ_8, ρ_9.

(#) Dat je polinom $f(x)=(b-a)x^n+2^na-b$, $a,b\in\mathbb{C}$. Odrediti a i b tako da ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ sa x^2-3x+2 bude $(2^n-1)x$.

Rješenje

$f(x)$ je djeljiv sa $x-c$ akko je $f(c)=0$.

Ako $f(x)$ nije djeljiv sa $x-c$ ostatak pri djeljenju $f(x)$ sa $x-c$ iznosi $f(c)$.

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$f(x)=(b-a)x^n+2^na-b \longrightarrow f(1)=b-a+2^na-b=2^na-a=(2^n-1)a$

$f(x)=(x^2-3x+2)g(x)+(2^n-1)x$

$f(2)=(b-a)2^n+2^na-b=$
$=b2^n-a2^n+2^na-b=$
$=2^nb-b=(2^n-1)b$

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=(b-a)x^n+2^na-b\\ f(1)&=(2^n-1)a\\ f(2)&=(2^n-1)b\end{aligned}\right\}\dots(1)$$

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=(x^2-3x+2)g(x)+(2^n-1)x\\ f(1)&=2^n-1\\ f(2)&=(2^n-1)\cdot 2\end{aligned}\right\}\dots(2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $a=1$, $b=2$

tražene vrijednosti

(#) Neka je $S=\{(1,a) \mid a\in\mathbb{R}\}$ i neka je na S definisana binarna operacija $*$ sa $(1,a)*(1,b)=(\alpha, a+b+1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

a) Odrediti vrijednost parametra α tako da skup S bude zatvoren u odnosu na operaciju $*$.

b) Za dobijenu vrijednost parametra α pokazati da je $(S,*)$ grupa. Da li je grupa Abelova?

Rj. a) $(1,a)*(1,b)=(\alpha, a+b+1)$

Nama treba α t.d. $(\alpha, a+b+1)\in S$

$a+b+1\in\mathbb{R}$. Prema tome $\alpha=1$.

b) Zatvorenost je zadovoljena (iz a)). Pokažimo da je operacija $*$ asocijativna, da $\exists$ inverzni i neutralni element.

ASOCIJATIVNOST

$\forall x,y,z\in S \quad (x*y)*z = x*(y*z)$

Uzmimo tri proizvoljna elementa iz S, $(1,a),(1,b),(1,c)\in S$

$$\left.\begin{aligned} ((1,a)*(1,b))*(1,c) &= (1,a+b+1)*(1,c) = (1, a+b+1+c+1) = (1,a+b+c+2)\\ (1,a)*((1,b)*(1,c)) &= (1,a)*(1,b+c+1) = (1, a+b+c+1+1) = (1,a+b+c+2)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow *$ jest asocijativna

NEUTRALNI ELEMENT

$\forall (1,a)\in S \quad \exists (1,a')\in S$ t.d. $(1,a)*(1,a')=(1,a) \Rightarrow (1,a+a'+1)=(1,a)$

$(1,a')*(1,a)=(1,a) \Rightarrow (1,a'+a+1)=(1,a)$

Neutralni element je $(1,-1)\in S$

INVERZNI ELEMENT

$\forall (1,a)\in S \quad \exists (1,a^*)\in S$ t.d. $(1,a)*(1,a^*)=(1,-1)$

$(1,a^*)*(1,a)=(1,-1)$

$(1,a)*(1,a^*)=(1,-1)$

$(1,a+a^*+1)=(1,-1) \qquad a+a^*+1=-1 \Rightarrow a^*=-a-2$

Inverzni element elementa $(1,a)$ je $(1,-a-2)$.

$(S,*)$ jest grupa.

Da li vrijedi KOMUTATIVNOST?

$(1,a)*(1,b)=(1,a+b+1)$

$(1,b)*(1,a)=(1,b+a+1)$ DA. Grupa jest Abelova.

(#) Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra λ:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \quad\;\; - x_4 + 2x_5 &= 1\\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2\\ 6x_1 \quad\quad - x_3 \quad\quad - 2x_5 &= 3\\ 4x_1 \quad\quad - x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= \lambda. \end{aligned}$$

Rj. Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom.

$$\bar{A}=[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2\\ 6 & 0 & -1 & 0 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -1 & -2 & 2 & \lambda \end{array}\right] \underset{\sim}{II_v \leftrightarrow I_v}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2\\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 6 & 0 & -1 & 0 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -1 & -2 & 2 & \lambda \end{array}\right] \underset{\sim}{I_k \leftrightarrow II_k} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2\\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 6 & -1 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 4 & -1 & -2 & 2 & \lambda \end{array}\right] \end{array}$$

$$\underset{\sim}{I_v + II_v} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 2 & -1 & -4 & 6 & 3\\ 0 & 6 & -1 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 4 & -1 & -2 & 2 & \lambda \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{III_v + II_v\cdot(-3)}{}} \underset{IV_v+II_v\cdot(-2)}{} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 2 & -1 & -4 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 12 & -20 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & \lambda-6 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{IV_v \leftrightarrow III_v} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 2 & -1 & -4 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & \lambda-6\\ 0 & 0 & 2 & 12 & -20 & -6 \end{array}\right] \underset{\sim}{IV_v + III_v\cdot(-2)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 2 & -1 & -4 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & \lambda-6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6-2\lambda \end{array}\right]$$

Diskusija

1° $\lambda=3$ $\quad$ rang A = rang $\bar{A}$ $=3<5$ $\Rightarrow$ Sistem ima ∞ mnogo rješenja

2 promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_4=t$, $x_5=s$

$x_3+6x_4-10x_5=-3$

$x_3=-6t+10s-3$

$2x_1 - x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 3$

$2x_1 = -6t+10s-3+4t-6s+3$

$2x_1 = -2t+4s$

$x_1 = -t+2s$

$x_2+x_1-x_3-3x_4+4x_5=2$

$x_2 = t-2s-6t+10s-3+3t-4s+2$

$x_2=-2t+4s-1$

Rješenje sistema je $(-t+2s, -2t+4s-1, -6t+10s-3, t, s)$

2° $\lambda\neq 3$ $\quad$ rang $A = 3 < 4 =$ rang $\bar{A}$ $\quad$ sistem nema rješenja

(#) Odrediti t tako da matrica $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & t \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ ima svojstvenu vrijednost jednaku 3.
Za dobijeno t odrediti ostale svojstvene vrijednosti matrice M i svojstvene vektore.

Rj. Nenula vektor $\vec{v}$ zovemo svojstveni vektor od M ako je
$$M\vec{v} = \lambda\vec{v}$$
za neki skalar λ. Skalar λ zovemo svojstvena vrijednost pridružena svojstvenom vektoru $\vec{v}$.

$M\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$M\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0$

$(M - \lambda I)\vec{v} = 0$

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & t \\ 3 & 6 & -1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ovo je homogeni sistem linearnih jednačina.

On ima ∞ mnogo rješenja akko $\det(M-\lambda I) = 0$.

$$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & t \\ 3 & 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & t \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)(-2-2\lambda+\lambda+\lambda^2-6t) = (5-\lambda)(\lambda^2-\lambda-6t-2)$$

Trebamo naći t takvo da je 3 nula polinoma $\lambda^2 - \lambda - 6t - 2 = 0$

Za $\lambda = 3$: $9 - 3 - 6t - 2 = 0$

$-6t + 4 = 0$

$6t = 4$

$t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ tražena vrijednost za t

$-6t - 2 = -6 \cdot \frac{2}{3} - 2 = -4 - 2 = -6$

$$\det(M-\lambda I) = (5-\lambda)(\lambda^2-\lambda-6) = (5-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-3)$$

Svojstvene vrijednosti matrice M su -2, 3 i 5.

Za $\lambda_1 = -2$ imamo $(M+2I)\vec{v} = 0$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2/3 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 7v_1 &= 0 \\ v_1 + 4v_2 + \tfrac{2}{3}v_3 &= 0 \\ 3v_1 + 6v_2 + v_3 &= 0 \end{aligned}$$

$v_1 = 0$

$4v_2 + \frac{2}{3}v_3 = 0$ (1)

$6v_2 + v_3 = 0$ (2)

(1)$\cdot$3: $12v_2 + 2v_3 = 0$

(2)$\cdot$2: $12v_2 + 2v_3 = 0$

$v_3 = -6v_2$

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ -6s \end{bmatrix}$, $s \neq 0$ je svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = -2$

Za $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2/3 \\ 3 & 6 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2v_1 &= 0 \\ v_1 - v_2 + \tfrac{2}{3}v_3 &= 0 \quad /\cdot 6 \\ 3v_1 + 6v_2 - 4v_3 &= 0 \end{aligned}$$

$v_1 = 0$

$-6v_2 + 4v_3 = 0$

$6v_2 - 4v_3 = 0$

$6v_2 = 4v_3$

$v_2 = \frac{4}{6}v_3 = \frac{2}{3}v_3$

$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3}s \\ s \end{bmatrix}$, $s \neq 0$ svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 3$

Za $\lambda_3 = 5$:

$v_1 - 3v_2 + \frac{2}{3}v_3 = 0$ $/\cdot 3$

$3v_1 + 6v_2 - 6v_3 = 0$

$3v_1 - 9v_2 + 2v_3 = 0$

$3v_1 + 6v_2 - 6v_3 = 0$ $-$

$-15v_2 + 8v_3 = 0$

$v_2 = \frac{8}{15}v_3$

$3v_1 - \cancel{9}^{3} \cdot \frac{8}{\cancel{15}_{5}}v_3 + 2v_3 = 0$

$3v_1 = \frac{14}{5}v_3$

$v_1 = \frac{14}{15}v_3$

$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{14}{15}s \\ \frac{8}{15}s \\ s \end{bmatrix}$, $s \neq 0$ svojstveni vektor koji odgovara λ_3

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 10.02.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**

1. **a)** Dati su skupovi $A = \{2,3,5\}$, $B = \{2,4,6\}$ i $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. Odrediti sve skupove X za koje važi $X \subseteq E$, $A \cap X = \{3,5\}$ i $B \cup X = E$.

b) S je skup uređenih parova (p,q), gdje su p i q cijeli pozitivni brojevi, a relacija ρ (ro) je definisana na sljedeći način $(p,q)\rho(p',q') \Leftrightarrow pq' = qp'$. Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije.

2. Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} x \quad + \quad 2z &= 0 \\ (2\lambda-1)x + y + 4z &= 2 \\ -3x + (\lambda+2)y + (\lambda+5)z &= \lambda + 3 \;. \end{aligned}$$

3. Date su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, a I je jedinična matrica trećeg reda. Riješiti jednačinu $B^{-1}XA = (3B - 2I)^{-1}$.

4. Neka su date matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pokazati da A i B imaju različite karakteristične polinome (pa prema tome nisu slične), ali imaju isti minimalni polinom. Prema tome neslične matrice mogu imati isti minimalni polinom.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

\# Dati su skupovi $A=\{2,3,5\}$, $B=\{2,4,6\}$ i $E=\{1,2,3,4,5,6\}$.
Odrediti sve skupove X za koje važi

$$X \subseteq E,\quad A\cap X=\{3,5\},\quad B\cup X=E.$$

Rj. $A\cap X=\{3,5\} \Rightarrow 3\in X$ i $5\in X$, $2\notin X$

$B\cup X=E \Rightarrow 1\in X$ i $3\in X$ i $5\in X$
a može biti $4\in X$, $6\in X$.

Prema tome 1, 3, 5 su sigurno u X, dok 4 i 6 mogu ali i ne moraju biti.

$X=\{1,3,5\}$ ili $X=\{1,3,4,5\}$ ili $X=\{1,3,5,6\}$ ili
$X=\{1,3,4,5,6\}$.

(#) S je skup uređenih parova (p, q) gdje su p i q cijeli pozitivni brojevi, a relacija ρ (ro) je definisana na sljedeći način $(p,q)\,\rho\,(p',q') \Leftrightarrow pq' = qp'$. Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije.

Rj.

REFLEKSIVNOST

$$\underline{\forall}\,\underline{(p,}\underline{q)}\,\underline{\in \mathbb{N}^2} \quad (p,q)\,\rho\,(p,q)$$

$(p,q)\,\rho\,(p,q) \Leftrightarrow pq = qp$ što je tačno za svaki izbor cijelih pozitivnih brojeva p i q

ρ jest refleksivna relacija

SIMETRIČNOST

$$\underline{\forall}\,\underline{(p,q)}\,\underline{\in \mathbb{N}^2} \quad \forall (r,s) \in \mathbb{N}^2 \quad (p,q)\,\rho\,(r,s) \Rightarrow (r,s)\,\rho\,(p,q)$$

$(p,q)\,\rho\,(r,s) \Leftrightarrow ps = qr \Rightarrow rq = sp \Leftrightarrow (r,s)\,\rho\,(p,q)$

$(r,s)\,\rho\,(p,q) \Leftrightarrow rq = sp$

ρ jest simetrična relacija

TRANZITIVNOST

$$\forall ((p,q),(r,s),(a,b) \in \mathbb{N}^2) \quad (p,q)\,\rho\,(r,s) \wedge (r,s)\,\rho\,(a,b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (p,q)\,\rho\,(a,b)$$

$(p,q)\,\rho\,(r,s) \Leftrightarrow ps = qr$

$(r,s)\,\rho\,(a,b) \Leftrightarrow rb = as$

$(p,q)\,\rho\,(a,b) \Leftrightarrow pb = qa$

$(p,q)\,\rho\,(r,s) \wedge (r,s)\,\rho\,(a,b) \Leftrightarrow ps = qr \wedge rb = sa \Rightarrow$

$\Rightarrow ps \cdot rb = qr \cdot sa \Rightarrow pb \cdot rs = qa \cdot rs \overset{/:rs}{\Longrightarrow} pb = qa$

$\Leftrightarrow (p,q)\,\rho\,(a,b)$ ρ jest tranzitivna relacija

ρ je relacija ekvivalencije q.e.d.

(#) Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} x \phantom{{}+(\lambda+2)y} + 2z &= 0 \\ (2\lambda-1)x + y + 4z &= 2 \\ -3x + (\lambda+2)y + (\lambda+5)z &= \lambda+3 \end{aligned}$$

Rj. Riješit ćemo sistem Kramerovom metodom

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2\lambda-1 & 1 & 4 \\ -3 & \lambda+2 & \lambda+5 \end{vmatrix} \overset{III_v - I_v \cdot 2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\lambda-1 & 1 & 6-4\lambda \\ -3 & \lambda+2 & \lambda+11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6-4\lambda \\ \lambda+2 & \lambda+11 \end{vmatrix} = \lambda+11 - (6\lambda+12-4\lambda^2-8\lambda)$$

$$= \lambda+11+4\lambda^2+2\lambda-12 = 4\lambda^2+3\lambda-1 = (\lambda+1)(4\lambda-1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ \lambda+3 & \lambda+2 & \lambda+5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \lambda+3 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 2(2\lambda+4-\lambda-3) = 2(\lambda+1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2\lambda-1 & 2 & 4 \\ -3 & \lambda+3 & \lambda+5 \end{vmatrix} \overset{III_v + I_v \cdot (-2)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\lambda-1 & 2 & 6-4\lambda \\ -3 & \lambda+3 & \lambda+11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6-4\lambda \\ \lambda+3 & \lambda+11 \end{vmatrix} = 2\lambda+22 - (18-6\lambda-4\lambda^2) =$$

$$= 2\lambda+22-18+6\lambda+4\lambda^2 = 4\lambda^2+8\lambda+4 = 4(\lambda+1)^2$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\lambda-1 & 1 & 2 \\ -3 & \lambda+2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda+2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda+3-2\lambda-4 = -\lambda-1 = (-1)(\lambda+1)$$

Diskusija

1° $\lambda \neq -1$; $\lambda \neq \frac{1}{4}$ $\Rightarrow D \neq 0$ sistem ima jedinstveno rješenje

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2(\lambda+1)}{(\lambda+1)(4\lambda-1)} = \frac{2}{4\lambda-1}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{4(\lambda+1)}{4\lambda-1}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-1}{4\lambda-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, \tfrac{1}{4}\}$$

2° $\lambda = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow D = 0$, $D_x \neq 0$ sistem nema rješenje

3° $\lambda = -1$ $\Rightarrow D = D_x = D_y = D_z = 0$ sistem trebamo riješiti na drugi način

Za $\lambda = -1$ sistem postaje

$$\begin{aligned} x + 0y + 2z &= 0 \\ -3x + y + 4z &= 2 \\ -3x + y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \phantom{{}+y} + 2z &= 0 \quad /\cdot 2 \\ -3x + y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x \phantom{{}+y} + 4z &= 0 \\ -\;\; -3x + y + 4z &= 2 \\ \hline 5x - y &= -2 \\ y &= 5x+2 \end{aligned}$$

$$-3x + \overbrace{5x+\cancel{2}}^{y} + 4z = \cancel{2}$$

$2x + 4z = 0 \quad /:2$

$2z = -x$

$z = -\frac{1}{2}x$

Sistem ima ∞ mnogo rješenja oblika $(t, 5t+2, -\frac{1}{2}t)$, $t \in \mathbb{R}$

\# Date su matrice $A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\2&3&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}2&-3&0\\1&0&-1\\-2&1&3\end{bmatrix}$, a I je jedinična matrica trećeg reda. Riješiti jednačinu $B^{-1}\cdot X\cdot A=(3B-2I)^{-1}$.

Rj. $B^{-1}\cdot X\cdot A=(3B-2I)^{-1}$ $/\cdot B$ sa lijeve str.

$X\cdot A=B(3B-2I)^{-1}$ $/\cdot A^{-1}$ sa desne strane

$X=B\underbrace{(3B-2I)}_{C}{}^{-1}\cdot A^{-1}$

$X=B\cdot C^{-1}\cdot A^{-1}$

$$C=3B-2I=\begin{bmatrix}6&-9&0\\3&0&-3\\-6&3&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-9&0\\3&-2&-3\\-6&3&7\end{bmatrix}$$

$$C^{-1}=\frac{1}{\det C}\cdot C_{kof}^{T}$$

$$\det C=\begin{vmatrix}4&-9&0\\3&-2&-3\\-6&3&7\end{vmatrix}\overset{I_k+III_k}{=\!=}\begin{vmatrix}4&-9&0\\0&-2&-3\\1&3&7\end{vmatrix}\overset{I_v+III_v\cdot(-4)}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}0&-21&-28\\0&-2&-3\\1&3&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-21&-28\\-2&-3\end{vmatrix}=63-56=7$$

$C_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-2&-3\\3&7\end{vmatrix}=-14+9=-5$ $C_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-9&0\\3&7\end{vmatrix}=63$ $C_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-9&0\\2&-3\end{vmatrix}=27$

$C_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}3&-3\\-6&7\end{vmatrix}=(-1)(21-18)=-3$ $C_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}4&0\\-6&7\end{vmatrix}=28$ $C_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}4&0\\3&-3\end{vmatrix}=12$

$C_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}3&-2\\-6&3\end{vmatrix}=9-12=-3$ $C_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}4&-9\\-6&3\end{vmatrix}=-(12-54)=42$ $C_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}4&-9\\3&-2\end{vmatrix}=-8+27=19$

$$C_{kof}=\begin{bmatrix}-5&-3&-3\\63&28&42\\27&12&19\end{bmatrix}\quad C^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-5&63&27\\-3&28&12\\-3&42&19\end{bmatrix}\quad A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A_{kof}^{T}$$

$$\det A=\begin{vmatrix}1&-2&0\\2&3&-1\\0&1&1\end{vmatrix}\overset{II_v+III_v}{=\!=}\begin{vmatrix}1&-2&0\\2&4&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2\\2&4\end{vmatrix}=4+4=8$$

$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}3&-1\\1&1\end{vmatrix}=3+1=4$ $A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-2&0\\1&1\end{vmatrix}=2$ $A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-2&0\\3&-1\end{vmatrix}=2$

$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&1\\0&1\end{vmatrix}=-2$ $A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1$ $A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&0\\2&-1\end{vmatrix}=1$

$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}=2$ $A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix}=-1$ $A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&-2\\2&3\end{vmatrix}=3+4=7$

$$A_{kof}=\begin{bmatrix}4&-2&2\\2&1&-1\\2&1&7\end{bmatrix}\quad A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4&2&2\\-2&1&1\\2&-1&7\end{bmatrix}$$

$$X=B\cdot C^{-1}\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-3&0\\1&0&-1\\-2&1&3\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-5&63&27\\-3&28&12\\-3&42&19\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4&2&2\\-2&1&1\\2&-1&7\end{bmatrix}=\frac{1}{56}\begin{bmatrix}2&-3&0\\1&0&-1\\-2&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-92&26&242\\-44&10&106\\-58&17&169\end{bmatrix}=\frac{1}{56}\begin{bmatrix}-52&22&166\\-34&9&73\\-34&9&129\end{bmatrix}$$

traženo rješenje

\# Neka su date matrice $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$. Pokazati da A i B imaju različite karakteristične polinome (pa prema tome nisu slične), ali imaju isti minimalni polinom. Prema tome neslične matrice mogu imati isti minimalni polinom.

Rj. Karakteristični polinom matrice A je polinom oblika $k(\lambda)=\det(\lambda I-A)$.

$$k(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-1)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

Karakteristični polinom matrice B je polinom oblika $p(\lambda)=\det(\lambda I-B)$

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-B)=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-2&-2\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

$$k(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)\neq(\lambda-2)^2(\lambda-1)=p(\lambda)$$

Matrice A i B imaju različite karakteristične polinome.

Minimalni polinom matrice A $m(\lambda)$ mora dijeliti $k(\lambda)$. Također svaki nesvodljivi faktor od $k(\lambda)$ tj. $\lambda-1$ i $\lambda-2$ su također faktori od $m(\lambda)$. Prema tome $m(\lambda)$ može biti tačno jedan od sljedeća dva polinoma $f(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$ ili $g(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$.

Izračunajmo $f(A)=(A-2I)(A-I)=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

Minimalni polinom matrice A je $m(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$.

Na potpuno isti način (za vježbu) pokažemo da je $n(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$ minimalni polinom matrice B.

Matrice A i B imaju isti minimalni polinom,

q.e.d.

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 15.06.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**

1. **a)** Neka su dati skupovi $A = \{10k + 7 \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{4p + 13 \,|\, p \in \mathbb{N}\}$. Dokazati da je $A \cap B \neq \emptyset$.

b) Neka je $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Neka je $\rho \subseteq A \times A$ zadana ovako
$\rho = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, b), (d, d), (d, e), (e, e), (e, d), (f, f)\}$.
Dokazati da je ρ (ro) relacija ekvivalencije u A.

2. **a)** Izračunati determinantu n-tog reda $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1+a \end{vmatrix}$.

b) Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Provjeriti da li je $A^{-1} = \frac{1}{4}A$.

3. Diskutovati rješenja sistema u u zavisnosti od parametra t

$$\begin{aligned} 2x - \ y + \ 3z &= -7 \\ x + 2y - \ 6z &= t \\ tx + 5y - 15z &= 8\ . \end{aligned}$$

4. Neka je $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = x_3 - x_4 \; i \; x_5 = 0\}$. Sabiranje u V je definisano na uobičajen način
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) + (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3,\ x_4 + y_4, x_5 + y_5)$ kao i množenje sa skalarom $\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4, \alpha x_5)$. Dokažite da je V vektorski prostor te mu nađite neku bazu i odredite dimenziju.

\# Neka su dati skupovi $A=\{10k+7 \mid k\in\mathbb{N}\}$ i $B=\{4p+13 \mid p\in\mathbb{N}\}$. Dokazati da je $A\cap B\neq\emptyset$. Odgovor obrazložiti!

Rj.

Pokušajmo naći broj a koji je element i skupa A i skupa B. Neka je $a=10k+7=4p+13$ za neko $k\in\mathbb{N}$, neko $p\in\mathbb{N}$.

$$10k+7=4p+13$$

$$10k-4p=6$$

$$2(5k-2p)=6 \quad /:2$$

$$5k-2p=3$$

Odavde vidimo da za $k=1$ i $p=1$ imamo $5-2=3$ tj.

$17\in A$ i $17\in B$

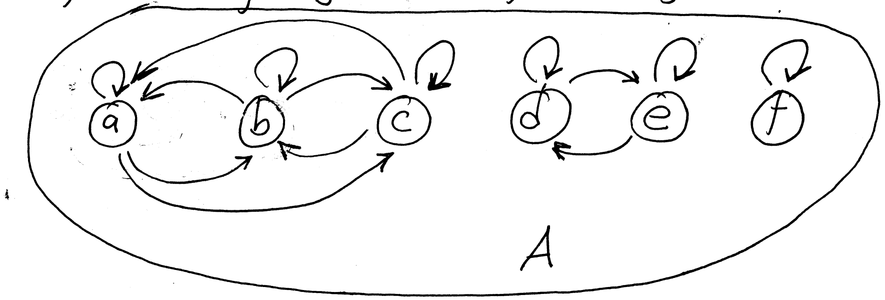
$A\cap B\neq\emptyset$

q.e.d.

\# Neka je $A=\{a,b,c,d,e,f\}$. Neka je $\rho\subseteq A\times A$ zadana ovako $\rho=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c),(d,d),(d,e),(e,e),(e,d),(f,f)\}$. Dokazati da je ρ (ro) relacija ekvivalencije u A.

Rj.

Nacrtajmo relaciju ρ kao orjentisan graf



REFLEKSIVNOST

$\forall x\in A \quad (x,x)\in\rho$ svaki element skupa A je u relaciji sam sa sobom

jest refleksivno

SIMETRIČNOST

$\forall x,y\in A \quad (x,y)\in\rho \Rightarrow (y,x)\in\rho$

svaki element x skupa A koji je u vezi sa y imamo da je i y u vezi sa x.

ρ jest simetrično

TRANZITIVNOST

$\forall x,y,z\in A \quad (x,y)\in\rho \wedge (y,z)\in\rho \Rightarrow (x,z)\in\rho$

ako je x u vezi sa y i y u vezi sa z tada je i x u vezi sa z.

ρ jest tranzitivno

ρ jest relacija ekvivalencije q.e.d.

Izračunati determinantu n-tog reda

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1+a \end{vmatrix}.$$

Rj. Izračunajmo prvo determinante drugog, trećeg i četvrtog tipa

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = 1+a-a = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1+a & a \\ 0 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \xlongequal{II_v - I_v} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \xlongequal{III_v - II_v} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & a \\ 0 & 0 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \xlongequal{II_v - I_v} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & a \\ 0 & 0 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \xlongequal{III_v - II_v} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \xlongequal{IV_v - III_v}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \xlongequal{IV_v - III_v} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1+a \end{vmatrix} \xlongequal{II_v - I_v} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1+a \end{vmatrix} \xlongequal{III_v - II_v} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1+a \end{vmatrix}$$

$$= \underset{\substack{IV_v - III_v \\ V_v - IV_v \\ \vdots \\ n\text{-1-vrsta minus } n\text{-2 vrsta}}}{\dots} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1+a \end{vmatrix} \xlongequal{n\text{-ta vrsta minus } n\text{-1 vrsta}} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1 \leftarrow$ tražena vrijednost determinante

II način: MATEMATIČKOM INDUKCIJOM

Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Provjeriti da li je $A^{-1} = \frac{1}{4} A$.

Rj.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{kof}^{T}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{II_v - I_v \\ III_v - I_v \\ IV_v - I_v}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{II_k - III_k}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = (-2)(4+4) = -16$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{I_v + II_v} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(1+1) = -4$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{I_k + III_k} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(1+1) = -4$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{I_k + III_k} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1-1) = -4$$

$$A_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{I_v + II_v} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(1+1) = -4$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{I_v + II_v} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1-1) = -4$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{II_v + III_v} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(1+1) = -4$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{I_v + II_v} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(-1-1) = 4$$

$$A_{24}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}\overset{I_v+III_v}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}2&0&0\\1&-1&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1&1\\-1&-1\end{vmatrix}=2(1+1)=4$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\-1&-1&1\end{vmatrix}\overset{I_v+II_v}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}2&0&0\\1&-1&-1\\-1&-1&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=2(-1-1)=-4$$

$$A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}\overset{I_v+II_v}{=\!=\!=}-\begin{vmatrix}2&0&0\\1&-1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=(-2)(-1-1)=4$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}\overset{II_v+III_v}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=(-2)\cdot(1+1)=-4$$

$$A_{34}=(-1)^7\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&-1\end{vmatrix}\overset{I_v+III_v}{=\!=\!=}-\begin{vmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&-1&-1\end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=(-2)(-1-1)=4$$

$$A_{41}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\-1&1&-1\end{vmatrix}\overset{I_v+II_v}{=\!=\!=}-\begin{vmatrix}2&0&0\\1&-1&-1\\-1&1&-1\end{vmatrix}=(-2)(1+1)=-4$$

$$A_{42}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\1&1&-1\end{vmatrix}\overset{I_v+II_v}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}2&0&0\\1&-1&-1\\1&1&-1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1&-1\\1&-1\end{vmatrix}=2(1+1)=4$$

$$A_{43}=(-1)^7\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&-1\end{vmatrix}\overset{I_k+III_k}{=\!=\!=}-\begin{vmatrix}2&1&1\\0&1&-1\\0&-1&-1\end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=(-2)(-1-1)=4$$

$$A_{44}=(-1)^8\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}\overset{II_v+III_v}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=(-2)(1+1)=-4$$

$$A_{kof}=\begin{bmatrix}-4&-4&-4&-4\\-4&-4&4&4\\-4&4&-4&4\\-4&4&4&-4\end{bmatrix}$$

Možemo primijetiti da je ova matrica simetrična pa je $A_{kof}=A_{kof}^T$

$$A^{-1}=\frac{-1}{16}\begin{bmatrix}-4&-4&-4&-4\\-4&-4&4&4\\-4&4&-4&4\\-4&4&4&-4\end{bmatrix}=\frac{-1}{16}(-4)\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

Prema tome jednakost $A^{-1}=\frac{1}{4}A$ važi.

Diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra t:

$$\begin{aligned}2x-y+3z&=-7\\x+2y-6z&=t\\tx+5y-15z&=8.\end{aligned}$$

Rj. Riješimo sistem Kramerovom metodom

$$D=\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&2&-6\\t&5&-15\end{vmatrix}\overset{II_v+I_v\cdot 2}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}2&-1&3\\5&0&0\\t&5&-15\end{vmatrix}=(-5)\begin{vmatrix}-1&3\\5&-15\end{vmatrix}=(-5)(15-15)=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}-7&-1&3\\t&2&-6\\8&5&-15\end{vmatrix}\overset{III_v+I_v\cdot 5}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}-7&-1&3\\t&2&-6\\-27&0&0\end{vmatrix}=(-27)\underbrace{\begin{vmatrix}-1&3\\2&-6\end{vmatrix}}_{6-6}=0$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2&-7&3\\1&t&-6\\t&8&-15\end{vmatrix}\underset{III_v+I_v\cdot 5}{\overset{II_v+I_v\cdot 2}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}2&-7&3\\5&t-14&0\\t+10&-27&0\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}5&t-14\\t+10&-27\end{vmatrix}=3(-135-\overbrace{(t-14)(t+10)}^{t^2-4t-140})$$

$$=3(-135-t^2+4t+140)=(-3)(t^2-4t-5)=(-3)(t-5)(t+1)$$

$D=16+20=36\quad t_{1,2}=\frac{4\pm 6}{2}\quad t_1=-1\quad t_2=5$

$$D_z=\begin{vmatrix}2&-1&-7\\1&2&t\\t&5&8\end{vmatrix}\underset{III_v+I_v\cdot 5}{\overset{II_v+I_v\cdot 2}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}2&-1&-7\\5&0&t-14\\t+10&0&-27\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&t-14\\t+10&-27\end{vmatrix}=-(t-5)(t+1)$$

Diskusija

1° $t\neq 5$ i $t\neq -1$ sistem nema rješenja ($D=0$ ali $D_y\neq 0$ i $D_z\neq 0$)

2° $t=5$

$D=D_x=D_y=D_z=0$. sistem ćemo riješiti Gausovom metodom.

Sistem postaje

$$\begin{aligned}2x-y+3z&=-7\quad(1)\\x+2y-6z&=5\quad(2)\\5x+5y-15z&=8\quad(3)\end{aligned}$$

$(2)+(1)\cdot 2:\ 5x=-9\Rightarrow x=-\frac{9}{5}$

$(2)\Rightarrow -\frac{9}{5}+2y-6z=5\quad /\cdot 5$

$-9+5y-15z=8$

$10y-30z=34$

$5y-15z=17$

$z=s\qquad y=\frac{15s+17}{5}$

Rješenje sistema je $\left(-\frac{9}{5},\frac{15s+17}{5},s\right)$, $s\in\mathbb{R}$.

3° $t=-1$, $D=D_x=D_y=D_z$ ~~sistem posbenji~~

$$\begin{aligned}2x-y+3z&=-7\quad(I)\\x+2y-6z&=-1\quad(II)\\-x+5y-15z&=8\quad(III)\end{aligned}$$

$(II)+(I)\cdot 2:\ 5x=-15$

$x=-3$

$(I)\Rightarrow -y+3z=-1$

Rješenje sistema je $(-3,3u+1,u)$, $u\in\mathbb{R}$

(#) Neka je $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in \mathbb{R}^5 \mid x_1-x_2=x_2-x_3=x_3-x_4 \ \text{i}\ x_5=0\}$.
Dokažite da je V vektorski prostor te nađite mu neku bazu i dimenziju.

Rj. Sabiranje u V je definisano na uobičajen način

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)+(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3,\ x_4+y_4,\ x_5+y_5)$$

kao i množenje sa skalarom α

$$\alpha(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3,\alpha x_4,\alpha x_5).$$

Vektorski prostor (ili linearni prostor) je uređena četvorka $(X,+,\cdot,F)$ gdje je F polje, a $\cdot$ je f-ja sa $F\times X$ u X, čija vrijednost (α,x) označavamo sa αx tako da za $\alpha,\beta\in F$ i $x,y\in X$ vrijedi

i) $(X,+)$ je Abelova grupa

ii) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

iii) $1\cdot x=x$ gdje je 1 multiplikativna jedinica od F

iv) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ i $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.

Članove od X zovemo vektori, a članove iz F zovemo skalari. Operaciju $\cdot$ zovemo skalarno množenje. Zbog kratkoće vektorski prostor $(X,+,\cdot,F)$ često označavamo sa X i kažemo da je X vektorski prostor nad poljem F.

(I) $(V,+)$ je Abelova grupa

zatvorenost $(\forall \vec{a},\vec{b}\in V\ \ \vec{a}+\vec{b}\in V)$

$\underbrace{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)}_{\vec{a}},\ \underbrace{(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)}_{\vec{b}}\in\mathbb{R}^5$ $\quad \vec{a}+\vec{b}=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,x_4+y_4,x_5+y_5)\in\mathbb{R}^5$.

Kako je $x_1-x_2=x_2-x_3=x_3-x_4$ i $x_5=0$ i $y_1-y_2=y_2-y_3=y_3-y_4$ i $y_5=0$ to

$(x_1+y_1)-(x_2+y_2)=(x_2+y_2)-(x_3+y_3)=(x_3+y_3)-(x_4+y_4)$ i $x_5+y_5=0$ to $\vec{a}+\vec{b}\in V$

Operacija $+$ je zatvorena u V

asocijativnost $(\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V,\ (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}))$

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,x_4+y_4,x_5+y_5)+(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5)=((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2,(x_3+y_3)+z_3,$
$(x_4+y_4)+z_4,(x_5+y_5)+z_5)=(x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2),x_3+(y_3+z_3),x_4+(y_4+z_4),x_5+(y_5+z_5))=$
$=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)+(y_1+z_1,y_2+z_2,y_3+z_3,y_4+z_4,y_5+z_5)=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ $\quad$ + je asocijativna u V

neutralni element $(\forall\vec{a}\in V\ \exists\vec{o}\in V$ t.d. $\vec{a}+\vec{o}=\vec{o}+\vec{a}=\vec{a})$

$\vec{o}=(0,0,0,0,0)$ $\quad \vec{o}\in V$ zato što je $0-0=0-0=0-0$ i $x_5=0$.

$\vec{o}$ jest neutralni element za $+$ u V

inverzni element $(\forall\vec{a}\in V\ \exists -\vec{a}\in V$ t.d. $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{o})$

Inverzni element elementa (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) je $(-x_1,-x_2,-x_3,-x_4,-x_5)$

(kako je $x_1-x_2=x_2-x_3=x_3-x_4$ to je $-x_1+x_2=-x_2+x_3=-x_3+x_4$)

element $(-x_1,-x_2,-x_3,-x_4,-x_5)$ jest inverzni element za $\forall(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in V$.

komutativnost $(\forall\vec{a},\vec{b}\in V\ \ \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a})$

$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,x_4+y_4,x_5+y_5)=(y_1+x_1,y_2+x_2,y_3+x_3,y_4+x_4,y_5+x_5)=\vec{b}+\vec{a}$

$+$ jest komutativno u V $\qquad (V,+)$ jest Abelova grupa q.e.d.

(II) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \ \forall\vec{a}\in V\ \ \ \alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$

$\alpha(\beta\vec{a})=\alpha\cdot(\beta x_1,\beta x_2,\beta x_3,\beta x_4,\beta x_5)=(\alpha(\beta x_1),\alpha(\beta x_2),\alpha(\beta x_3),\alpha(\beta x_4),\alpha(\beta x_5))$
$=((\alpha\beta)x_1,(\alpha\beta)x_2,(\alpha\beta)x_3,(\alpha\beta)x_4,(\alpha\beta)x_5)=(\alpha\beta)\vec{a}$ $\quad$ tj. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$ q.e.d.

(III) $\forall\vec{a}\in V\ \ 1\cdot\vec{a}=\vec{a}\ \ (1\in\mathbb{R})$

trivijalno $\quad 1\cdot(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ tj. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ q.e.d.

(IV) $\forall\alpha\in\mathbb{R}\ \forall\vec{a},\vec{b}\in V\ \ \ \alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ i $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$

$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,x_4+y_4,x_5+y_5)=(\alpha x_1+\alpha y_1,\alpha x_2+\alpha y_2,\alpha x_3+\alpha y_3,$
$\alpha x_4+\alpha y_4,\alpha x_5+\alpha y_5)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3,\alpha x_4,\alpha x_5)+(\alpha y_1,\alpha y_2,\alpha y_3,\alpha y_4,\alpha y_5)$
$=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$, dobili smo $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ q.e.d.

ZA VJEŽBU POKAZAT DA JE $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

Prema tome V je vektorski prostor.

II način: Možemo pokazati da je V vektorski podprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^5$.

Nađimo sad bazu vektorskog prostora V.

Skup vektora $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\dots,\vec{v}_n)$ koji su linearno nezavisni i koji generišu vektorski prostor V zovemo bazu.

Baza za vektorski prostor $\mathbb{R}^5$ je $(1,0,0,0,0)$, $(0,1,0,0,0)$, $(0,0,1,0,0)$, $(0,0,0,1,0)$
$(0,0,0,0,1)$. Iskoristimo ovu bazu i formirajmo bazu za naš prostor V.

Prema pretpostavci $x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = x_3 - x_4$ i $x_5 = 0$.

Ako uzmemo $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ $\Rightarrow$ $x_3 = 2$ i $x_4 = 3$.

Ako uzmemo $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ $\Rightarrow$ $x_4 = 2$ i $x_1 = -1$

Ako uzmemo $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ $\Rightarrow$ $x_2 = -1$ i $x_1 = -2$

Moguća baza za V je $\{(0,1,2,3,0), (-1,0,1,2,0), (-2,-1,0,1,0)\}$

Provjerimo da li je ovaj sistem linearno zavisan.

$$\alpha(0,1,2,3,0) + \beta(-1,0,1,2,0) + \gamma(-2,-1,0,1,0) = (0,0,0,0,0)$$

$$\begin{aligned} -\beta - 2\gamma &= 0 \quad (a) \\ \alpha - \gamma &= 0 \quad (b) \\ 2\alpha + \beta &= 0 \quad (c) \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma &= 0 \quad (d) \end{aligned}$$

Rijesimo se γ.

$(a)+(b)(2)$: $-2\alpha - \beta = 0$

(c): $2\alpha + \beta = 0$

$(d)+(b)$: $4\alpha + 2\beta = 0$

$2\alpha + \beta = 0$

$\alpha = 1 \Rightarrow \beta = -2$

$\gamma = 1$

Kako smo dobili $\alpha \neq 0$ (i $\beta \neq 0$ i $\gamma \neq 0$) sistem nije linearno nezavisan pa nije i baza. Izbacimo jedan element iz baze. Nova moguća baza za V je $\{(0,1,2,3,0), (-2,-1,0,1,0)\}$. Ispitajmo linearnu zavisnost.

$$\alpha(0,1,2,3,0) + \beta(-2,-1,0,1,0) = 0$$

$$\begin{aligned} -2\beta &= 0 \\ \alpha - \beta &= 0 \\ 2\alpha &= 0 \\ 3\alpha + \beta &= 0 \\ \hline \alpha = \beta &= 0 \end{aligned}$$

Sistem $\{(0,1,2,3,0), (-2,-1,0,1,0)\}$ je linearno nezavisan i on je baza za vektorski prostor V.

$\therefore$ Dimenzija vektorskog prostora V je 2.

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 30.06.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**

1. (40%) **(a)** Neka su $x = 2a + 3$ i $y = 4a + 9$, $a \in \mathbb{N}$ prirodni brojevi

I) dokazati da je broj $(x + y)(y - x)$ djeljiv sa 24;

II) odrditi ostatak pri djeljenju broja y sa brojem x.

Odgovore obrazložiti!

(60%) **(b)** Neka su (a, b) i (c, d) elementi iz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Definišimo relaciju $\leq$ na sljedeći način: $(a, b) \leq (c, d)$ akko je ili $a < c$ ili ($a = c$ i $b \leq d$). Dokazati da je relacija $\leq$ refleksivna, antisimetrična, tranzitivna i da zadovoljava zakon trihotomije (prisjetimo se relacija $\leq \subseteq P \times P$ zadovoljava zakon trihotomije na nekom skupu P akko $\forall x, y \in P$ imamo $x \leq y$ ili $y \leq x$).

2. **a)** Izračunati determinantu n-tog reda $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$.

b) Odrediti strukturu koju množenje matrica čini na skupu $\left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

3. Diskutovati rješenja sistema u u zavisnosti od parametra λ:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 &= 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= \lambda\ . \end{aligned}$$

4. Naći svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti matrice $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Neka su $x=2a+3$; $Y=4a+9$, $a\in\mathbb{N}$ prirodni brojevi.
a) dokazati da je broj $(x+Y)(Y-x)$ djeljiv sa 24;
b) odrediti ostatak pri djeljenju broja Y sa brojem x.
Odgovore obrazložiti!

Rj. a)
$$(x+Y)(Y-x)=(2a+3+4a+9)(4a+9-2a-3)=(6a+12)(2a+6)=$$
$$=6(a+2)\,2(a+3)=12(a+2)(a+3)$$

Posmatrajmo brojeve $12(a+2)(a+3)$ i 24.

Ako je a paran broj ($a=2k$ (za neko $k\in\mathbb{N}$)) tada
$$12(2k+2)(2k+3)=24(k+1)(2k+3)$$
pa je $(x+Y)(Y-x)$ djeljiv sa 24.

Ako je a neparan broj ($a=2k+1$ za neko $k\in\mathbb{N}$) tada
$$12(a+2)(a+3)=12(2k+1+2)(2k+1+3)=\underbrace{12\cdot 2}_{=24}(2k+3)(k+2)$$
pa je i u ovom slučaju $(x+Y)(Y-x)$ djeljivo sa 24.

Broj $(x+Y)(Y-x)$ je djeljiv sa 24.

b)
$$Y:x=(4a+9):(2a+3)=\frac{4a+9}{2a+3}=\frac{2a+3+2a+3+3}{2a+3}=2+\frac{3}{2a+3}$$

Ostatak pri djeljenju broja Y sa brojem x je 3 (ostatak je uvijek cio broj), dok je izraz $\frac{3}{2a+3}$ decimalni dio broja $\frac{Y}{x}$.

II način:
$$\begin{array}{l}(4a+9):(2a+3)=2\\ \underline{-\ 4a+6}\\ \quad\ \ 3\end{array}$$

ostatak je 3.

Neka su (a,b) i (c,d) elementi iz $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Definišimo $(a,b) \leq (c,d)$ ako je ili $a<c$ ili ($a=c$ i $b\leq d$).

Dokazati da je relacija $\leq$ relacija totalnog poretka.

Rj. Za relaciju $\leq$ kažemo da je relacija totalnog poretka na nekom skupu P akko je $\leq \subseteq P\times P$ tako da $\forall x,y,z\in P$ zadovoljava

a) $x \leq x$ (refleksivnost);

b) $x\leq y$ i $y\leq x$ povlači $x=y$ (antisimetričnost);

c) $x\leq y$ i $y\leq z$ povlači $x\leq z$ (tranzitivnost) i

d) $x\leq y$ ili $y\leq x$ (zakon trihotomije)

REFLEKSIVNOST

$\forall (a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $\quad (a,a)\leq(a,a)$

po naroj definiciji relacije $\leq$ ili je $a<a$ ili je $a=a$ i $a\leq a$

kako važi $a=a$ i $a\leq a$ relacija $\leq$ jest refleksivna

ANTISIMETRIČNOST

$\forall (a,b),(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $\quad (a,b)\leq(c,d)$ i $(c,d)\leq(a,b) \Rightarrow (a,b)=(c,d)$

$(a,b)\leq(c,d) \overset{\text{po def.}}{\Longleftrightarrow}$ ili $a<c$ ili ($a=c$ i $b\leq d$)

$(c,d)\leq(a,b) \overset{\text{po def.}}{\Longleftrightarrow}$ ili $c<a$ ili ($c=a$ i $d\leq b$) ...(2)

Kako istovremeno ne može biti $a<c$ i neka tvrdnja iz (2) to mora biti $a=c$ i $b=d$ tj. $(a,b)=(c,d)$

Relacija $\leq$ je antisimetrična.

TRANZITIVNOST

$\forall (a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $\quad (a,b)\leq(c,d)$ i $(c,d)\leq(e,f) \Rightarrow (a,b)\leq(e,f)$

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\leq(c,d) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} a<c \vee a=c \text{ i } b\leq d\\ (c,d)\leq(e,f) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} c<e \vee c=e \text{ i } d\leq f\end{array}\right\} \Rightarrow a<e \vee a=e \text{ i } b\leq f$$

Relacija $\leq$ je tranzitivna

TRIHOTOMIJA

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\leq(c,d) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a<c \vee b\leq d \text{ i } a=c\\ (c,d)\leq(a,b) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} c<a \vee d\leq b \text{ i } c=a\end{array}\right\} \Rightarrow (a,b)\leq(c,d) \text{ ili } (c,d)\leq(a,b)$$

Važi zakon trihotomije

$\boxed{\text{Relacija} \leq \text{je relacija totalnog poretka q.e.d}}$

Izračunati determinantu n-tog reda

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Rj. Izračunajmo prvo determinante trećeg i četvrtog tipa.

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1\\ -1 & x & 0\\ 0 & -1 & x\end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} x & 0\\ -1 & x\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1\\ -1 & x\end{vmatrix} = x^2(x+1)+(x+1) = (x^2+1)(x+1) = x^3+x^2+x+1$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & x & 0 & 0\\ 0 & -1 & x & 0\\ 0 & 0 & -1 & x\end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} x & 0 & 0\\ -1 & x & 0\\ 0 & -1 & x\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ -1 & x & 0\\ 0 & -1 & x\end{vmatrix} \overset{II_v+I_v}{=}$$

$$= x^3(x+1) + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & x+1 & 1\\ 0 & -1 & x\end{vmatrix} = x^3(x+1) + \underbrace{\overbrace{\begin{vmatrix} x+1 & 1\\ -1 & x\end{vmatrix}}^{x^2+x+1}}_{\text{determinanta drugog tipa}} = x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}_{n\times n} \overset{\text{razvijamo po prvoj koloni}}{=} (x+1)\begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & 0\\ -1 & x & 0 \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & x & 0\\ 0 & 0 & \dots & -1 & x\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ -1 & x & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & x & 0\\ 0 & 0 & \dots & -1 & x\end{vmatrix}$$

$$\overset{II_v+I_v}{=} x^{n-1}(x+1) + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 0 & x+1 & 1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x\end{vmatrix} = x^{n-1}(x+1) + \underbrace{\begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & 0 & 0\\ -1 & x & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & x & 0\\ 0 & 0 & \dots & -1 & x\end{vmatrix}}_{\text{naša determinanta } (n-2)\text{-gog tipa}} =$$

$$= x^n + x^{n-1} + \dots + x^2+x+1$$ ← Tražena vrijednost determinante

II način MATEM. INDUKCIJOM

Odrediti strukturu koju množenje matrica čini na skupu

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b\in\mathbb{R} \right\}.$$

Rj. $M \overset{def}{=} \left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b\in\mathbb{R} \right\}$

Da li je skup M zatvoren? $(\forall A,B\in M \;\; A\cdot B\in M)$

$$A=\begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} c & c-d \\ 0 & d \end{bmatrix},\quad a,b,c,d\in\mathbb{R}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & c-d \\ 0 & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac & ac\cancel{-ad}\cancel{+ad}-bd \\ 0 & bd \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac & ac-bd \\ 0 & bd \end{bmatrix}$$

Vidimo da $A\cdot B\in M \Rightarrow$ množenje matrica je zatvoreno u M

Da li je množenje u skupu M asocijativno? $(\forall A,B,C\in M \;\; (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C))$

$$(A\cdot B)\cdot C=\left(\begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & c-d \\ 0 & d \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} e & e-f \\ 0 & f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac & ac-bd \\ 0 & bd \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & e-f \\ 0 & f \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} ace & ace\cancel{-acf}\cancel{+acf}-bdf \\ 0 & bdf \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ace & ace-bdf \\ 0 & bdf \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ce & ce-df \\ 0 & df \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} c & c-d \\ 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & e-f \\ 0 & f \end{bmatrix}\right)$$

Množenje u M je asocijativno

Da li u M postoji neutralni element? $(\forall A\in M \;\exists E\in M \;\; A\cdot E=E\cdot A=A)$

Matrica $E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pripada skupu M i očigledno $A\cdot E=E\cdot A=A \;\; \forall A\in M$

Postoji neutralni element u M.

Da li u M postoji inverzni element? $(\forall A\in M \;\exists A^{-1}\in M \;\; A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E)$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 & e_1-e_2 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} ae_1=1 \Rightarrow e_1=\frac{1}{a} \\ be_2=1 \Rightarrow e_2=\frac{1}{b} \end{array}$$

Prema tome $\begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a}-\frac{1}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a}-\frac{1}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \Rightarrow$ M ima inverzni element.

ZA VJEŽBU POKAZATI DA JE MNOŽENJE KOMUTATIVNO U M.

Prema tome množenje matrica čini skup M Abelovom grupom.

Diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ:

$$\begin{aligned} 5x_1-3x_2+2x_3+4x_4&=3 \\ 4x_1-2x_2+3x_3+7x_4&=1 \\ 3x_1-6x_2-x_3-5x_4&=9 \\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4&=\lambda \end{aligned}$$

Rj. Riješimo sistem Kroneker-Kapelijevom metodom

$$[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right] \overset{I_v\leftrightarrow III_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right]$$

$$\overset{I_k\leftrightarrow III_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -6 & 3 & -5 & 9 \\ 3 & -2 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 4 & 3 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right] \end{array} \underset{IV_v+I_v\cdot 7}{\overset{II_v+I_v\cdot 3,\; III_v+I_v\cdot 2}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -6 & 3 & -5 & 9 \\ 0 & -20 & 13 & -8 & 28 \\ 0 & -15 & 11 & -6 & 21 \\ 0 & -45 & 28 & -18 & \lambda+63 \end{array}\right]$$

$$\overset{II_v:(-4)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -6 & 3 & -5 & 9 \\ 0 & 5 & -\frac{13}{4} & 2 & -7 \\ 0 & -15 & 11 & -6 & 21 \\ 0 & -45 & 28 & -18 & \lambda+63 \end{array}\right] \underset{IV_v+II_v\cdot 9}{\overset{III_v+II_v\cdot 3}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -6 & 3 & -5 & 9 \\ 0 & 5 & -\frac{13}{4} & 2 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & 0 & \lambda \end{array}\right]$$

$$\overset{III_k\leftrightarrow IV_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_3 & x_2 & x_4 & x_1 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -6 & -5 & 3 & 9 \\ 0 & 5 & 2 & -\frac{13}{4} & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & \lambda \end{array}\right] \end{array} \overset{III_v+IV_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -6 & -5 & 3 & 9 \\ 0 & 5 & 2 & -\frac{13}{4} & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right]$$

Diskusija

1° $\lambda\neq 0$ $\;\operatorname{rang} A<\operatorname{rang}\bar{A} \Rightarrow$ sistem nema rješenja

2° $\lambda=0$ $\;\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\bar{A}<4 \Rightarrow$ sistem ima ∞ mnogo rješenja (jednu promjenjivu ćemo uzeti proizvoljno)

$$\begin{aligned} -x_3-6x_2-5x_4+3x_1&=9 \\ 5x_2+2x_4-\tfrac{13}{4}x_1&=-7 \\ \tfrac{5}{4}x_1&=0 \end{aligned} \Rightarrow x_1=0$$

$$\begin{aligned} -x_3-6x_2-5x_4&=9 \quad /\cdot 2 \\ 5x_2+2x_4&=-7 \quad /\cdot 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x_3-12x_2-10x_4&=18 \\ +\quad 25x_2+10x_4&=-35 \\ \hline -2x_3+13x_2&=-17, \quad x_2=s \end{aligned}$$

$$x_3=\frac{13s+17}{2}$$

$$2x_4=-5x_2-7 \Rightarrow x_4=\frac{-5s-7}{2}$$

Rješenje sistema je $\left(0, s, \frac{13s+17}{2}, \frac{-5s-7}{2}\right)$, $s\in\mathbb{R}$.

(#) Naći svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

tj. Prema definiciji $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$, gdje je $\vec{v} \neq \vec{0}$.

$$A\vec{v} - \lambda \vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}, \text{ gdje je } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ je homogeni sistem linearnih jednačina, i on ima netrivijalna rješenja akko $\det(A-\lambda I) = 0$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{I_k + (II_k + III_k)}{=\!=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 3-\lambda & 5-\lambda & -1 \\ 3-\lambda & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{III_v - I_v}{\overset{II_v - I_v}{=\!=}} (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)$$

Svojstvene vrijednosti matrice A su 2, 3 i 6.

Za $\lambda = 2$ imamo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tj.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \quad (1) \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \quad (2) \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$(1) \equiv (3)$

$(1)+(2)$: $2x_2 = 0$, $x_2 = 0$

$x_1 + x_3 = 0$

$x_3 = s \Rightarrow x_1 = -s$

Svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 2$ odgovara svojstveni vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$

Za $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tj.

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 0 \quad (a) \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \quad (b) \\ x_1 - x_2 &= 0 \quad (c) \end{aligned}$$

$\left.\begin{aligned} (a) &\Rightarrow x_2 = x_3 \\ (c) &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = m$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 3$ odgovara svojs. vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} m \\ m \\ m \end{bmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$

Za $\lambda = 6$ imamo

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tj.

$$\begin{aligned} -3x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \quad (I) \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \quad (II) \\ x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \quad (III) \end{aligned}$$

$(II)+(I)$: $-4x_1 - 2x_2 = 0 \quad /:2$

$(III)+(I)\cdot 3$: $-8x_1 - 4x_2 = 0$

$x_2 = -2x_1 \Rightarrow x_3 = x_1$

Svojs. vrijednosti $\lambda = 6$ odgovara sv. vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} l \\ -2l \\ l \end{bmatrix}$, $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 07.09.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**

1. a) Odrediti sve polinome P trećeg stepena koji zadovoljavaju sljedeće uvjete: $P(0) = 1$, $P(1) = 4$, $P(2) = 15$, $P(-1) = 0$, $P(-2) = -5$. (Polinom trećeg stepena je oblika $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$).

b) Koje od sljedećih binarnih operacija $a \circ b$ na cijelim brojevima a i b su asocijativne, a koje su komutativne?

$$a \circ b \overset{def}{=} a - b, \quad a \circ b \overset{def}{=} a^2 + b^2, \quad a \circ b \overset{def}{=} 2(a+b), \quad a \circ b \overset{def}{=} -a - b.$$

2. a) Metodom matematičke indukcije dokazati da $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ za svaki prirodan broj n.

b) Neka je dat skup $G = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ na kojem je definisana operacija "obično" množenje $\cdot$ takvo da $a^3 \overset{def}{=} e$ i $b^2 \overset{def}{=} e$. Dokazati da je $(G, \cdot)$ grupa. Da li je grupa Abelova?

3. Diskutovati rješenja sistema u ovisnosti o parametra λ:

$$\begin{aligned} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 &= \lambda \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 &= \lambda^2 \,. \end{aligned}$$

4. Izračunati svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ nad poljem kompleksnih brojeve.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

\# Odrediti sve polinome P trećeg stepena koji zadovoljavaju sljedeće uvjete: $P(0)=1$, $P(1)=4$, $P(2)=15$, $P(-1)=0$, $P(-2)=-5$. (Polinom trećeg stepena je oblika $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$).

Rj.:

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ polinom trećeg stepena

$$\begin{aligned}
P(0)=1 &\Rightarrow d=1\\
P(1)=4 &\Rightarrow a+b+c+d=4\\
P(2)=15 &\Rightarrow 8a+4b+2c+d=15\\
P(-1)=0 &\Rightarrow -a+b-c+d=0\\
P(-2)=-5 &\Rightarrow -8a+4b-2c+d=-5
\end{aligned}$$

$d=1$

$$\begin{aligned}
a+b+c&=3 \quad (a)\\
8a+4b+2c&=14 \quad (b)\\
-a+b-c&=-1 \quad (c)\\
-8a+4b-2c&=-6 \quad (d)
\end{aligned}$$

$(a)+(c)$: $2b=2$

$b=1$

$$\begin{aligned}
a+c&=2\\
8a+2c&=10\\
-a-c&=-2\\
-8a-2c&=-10
\end{aligned}$$

$/:2$

$$\begin{aligned}
a+c&=2 \quad (I)\\
4a+c&=5 \quad (II)
\end{aligned}$$

$(II)-(I)$: $3a=3$

$a=1 \Rightarrow c=2-1=1$

Polinom trećeg stepena koji zadovoljava date uvjete je $P(x)=x^3+x^2+x+1$

Koje od sljedećih binarnih operacija $a \circ b$ na cijelim brojevima a i b su asocijativne, a koje su komutativne?

$$a \circ b \overset{def}{=} a-b, \quad a \circ b \overset{def}{=} a^2+b^2, \quad a \circ b \overset{def}{=} 2(a+b), \quad a \circ b \overset{def}{=} -a-b$$

Rj:

Za operaciju $\circ$ kažemo da je asocijativna na skupu $\mathbb{Z}$ akko $\forall (a,b,c \in \mathbb{Z})$ $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. Operacija je komutativna akko je $a \circ b = b \circ a$ za $\forall a,b \in \mathbb{Z}$.

1° $a \circ b \overset{def}{=} a-b$

$\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$ $\quad (a \circ b) \circ c = (a-b) \circ c = (a-b)-c = a-b-c = a-(b+c) = a \circ (b+c)$

U ovom slučaju operacija nije asocijativna.

Da li je komutativna?

$$a \circ b = a-b = -b+a = -(b-a) = -(b \circ a)$$

Operacija nije ni komutativna.

2° $a \circ b \overset{def}{=} a^2+b^2 \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{aligned} (a \circ b) \circ c &= (a^2+b^2) \circ c = (a^2+b^2)^2 + c^2 = A \\ a \circ (b \circ c) &= a \circ (b^2+c^2) = a^2 + (b^2+c^2)^2 = B \end{aligned}\right\} \Rightarrow A \neq B$$

operacija nije asocijativna

$a \circ b = a^2+b^2 = b^2+a^2 = b \circ a \Rightarrow$ operacija je komutativna

3° $a \circ b \overset{def}{=} 2(a+b)$

$$\left.\begin{aligned} (a \circ b) \circ c &= (2(a+b)) \circ c = 2(2(a+b)+c) = 4a+4b+2c \\ a \circ (b \circ c) &= a \circ (2(b+c)) = 2(a+2(b+c)) = 2a+4b+4c \end{aligned}\right\}$$ operacija nije asocijativna

$a \circ b = 2(a+b) = 2(b+a) = b \circ a \Rightarrow$ operacija je komutativna

4° $a \circ b \overset{def}{=} -a-b$

$$\left.\begin{aligned} (a \circ b) \circ c &= (-a-b) \circ c = -(-a-b)-c = a+b-c \\ a \circ (b \circ c) &= a \circ (-b-c) = -a-(-b-c) = -a-b+c \end{aligned}\right\}$$ operacija nije asocijativna

$a \circ b = -a-b = -b-a = b \circ a \Rightarrow$ operacija je komutativna

Metodom matematičke indukcije dokazati da

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ za svaki prirodan broj n.

Rj: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Tvrdnja je tačna za broj 1.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za sve brojeve k od 1 do n.

Tj. pretpostavimo da $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ za $k=1,2,\dots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke pokažimo da je tvrdnja tačna i za $n+1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tj. dobili smo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

što je i trebalo dobiti.

ZAKLJUČAK

Tvrdnja je tačna za sve prirodne brojeve.

Neka je dat skup $G=\{e,a,a^2,b,ab,a^2b\}$ na kojem je definisana operacija "obično" množenje $\cdot$. Dokazati da je $(G,\cdot)$ grupa. Da li je grupa Abelova? Napomena: $a^3 \overset{def}{=} e$, $b^2 \overset{def}{=} e$.

Rj.

ZATVORENOST

$\forall x,y\in G \quad x\cdot y\in G$

Napravimo multiplikativnu tabelu za ovaj skup (Kejlijevu tabelu)

$\cdot$	e	a	a^2	b	ab	a^2b
e	e	a	a^2	b	ab	a^2b
a	a	a^2	e	ab	a^2b	b
a^2	a^2	e	a	a^2b	b	ab
b	b	ab	a^2b	e	a	a^2
ab	ab	a^2b	b	a	a^2	e
a^2b	a^2b	b	ab	a^2	e	a

$a^2\cdot a^2 = a^4 = a^3\cdot a = e\cdot a = a$

$a^2\cdot ab = a^3 b = e\cdot b = b$

$ba = ab$

$ba^2 = a^2b$

$b\cdot ab = ab^2 = a$

$ab\cdot b = ab^2 = a\cdot e = a$

Iz tabele vidimo da je operacija obično množenje zatvorena.

ASOCIJATIVNOST

$\forall x,y,z\in G \quad (x\cdot y)\cdot z = x\cdot (y\cdot z)$

Da je operacija "obično" množenje asocijativno znamo od ranije.

NEUTRALNI ELEMENT

$\forall x\in G \quad \exists e\in G \quad x\cdot e = e\cdot x = x$

Iz tabele vidimo da je neutralni element u ovom slučaju e.

INVERZNI ELEMENT

$\forall x\in G \quad \exists x'\in G \quad x\cdot x' = x'\cdot x = e$

Neutralni element za e je e.
Neutralni element za a je a^2.
Neutralni element za a^2 je a.
Neutralni element za b je b.
Neutralni element za ab je a^2b.
Neutralni element za a^2b je ab.

Svaki element iz G ima neutralni element.

$\Rightarrow (G,\cdot)$ je grupa
q.e.d.

KOMUTATIVNOST

$\forall x,y\in G \quad x\cdot y = y\cdot x$

Primjetimo da je tabela simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu. Operacija $\cdot$ jest komutativna. $(G,\cdot)$ je Abelova grupa

U ovisnosti o parametru $\lambda\in\mathbb{R}$ riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned}(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 &= 1\\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 &= \lambda\\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 &= \lambda^2.\end{aligned}$$

Rj. Riješimo sistem Cramerovom metodom

$$D=\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix} \underset{=}{\overset{I_k+(II_k+III_k)}{=}} \begin{vmatrix}3+\lambda & 1 & 1\\ 3+\lambda & 1+\lambda & 1\\ 3+\lambda & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix} = (3+\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix} \underset{III_v-I_v}{\overset{II_v-I_v}{=}}$$

$$= (3+\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix} = (\lambda+3)\lambda^2$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda & 1+\lambda & 1\\ \lambda^2 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix} \underset{III_k-I_k}{\overset{II_k-I_k}{=}} \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ \lambda & 1 & 1-\lambda\\ \lambda^2 & 1-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1-\lambda\\ 1-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2\end{vmatrix} \overset{II_k-I_k}{=}$$

$$= \begin{vmatrix}1 & -\lambda\\ 1-\lambda^2 & \lambda\end{vmatrix} = \lambda+\lambda-\lambda^3 = 2\lambda-\lambda^3 = \lambda(2-\lambda^2)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & \lambda^2 & 1+\lambda\end{vmatrix} \overset{I_k-III_k}{=} \begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda & 1\\ -\lambda & \lambda^2 & 1+\lambda\end{vmatrix} \overset{III_v+I_v}{=} \begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda^2+1 & 2+\lambda\end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ \lambda^2+1 & \lambda+2\end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda^2+2\lambda-\lambda^2-1) = \lambda(2\lambda-1)$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda^2\end{vmatrix} \overset{I_k-II_k}{=} \begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -\lambda & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & 1 & \lambda^2\end{vmatrix} \overset{II_v+I_v}{=} \begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2+\lambda & 1+\lambda\\ 0 & 1 & \lambda^2\end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix}\lambda+2 & \lambda+1\\ 1 & \lambda^2\end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1)$$

Diskusija

1° za $\lambda\neq 0$ i $\lambda\neq -3$ sistem ima jedinstveno rješenje

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)},\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)},\quad z=\frac{D_z}{D}=\frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}$$

2° za $\lambda=-3$ imamo $D=0$ ali $D_x\neq 0$ pa sistem nema rješenja

3° za $\lambda=0$ imamo $D=D_x=D_y=D_z=0$ pa riješimo sistem na drugi način.

za $\lambda=0$ sistem postaje

$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3&=1\\ x_1+x_2+x_3&=0\end{aligned}$$

Odavde vidimo (ZAŠTO?) da sistem za $\lambda=0$ nema rješenja.

(#) Izračunati svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ nad poljem kompleksnih brojeva.

Rj.

Prisjetimo se, nenula vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ zovemo svojstveni vektor matrice A ako je $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$ za neki skalar λ.
U našem slučaju $\lambda \in \mathbb{C}$ (λ zovemo svojstvena vrijednost).

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$,

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$$
$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$
$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \quad \text{gdje je } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ovo je homogeni sistem linearnih jednačina i on ima netrivijalna rješenja akko $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 + 4 = 9 - 6\lambda + \lambda^2 + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 13$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$
$$D = 36 - 52 = -16$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 4i}{2}$$

Svojstvene vrijednost matrice A su $\lambda_1 = 3-2i$ i $\lambda_2 = 3+2i$

Za $\lambda_1 = 3-2i$ imamo

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$
$$\begin{bmatrix} 2i & 2 \\ -2 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tj.
$$2i x_1 + 2x_2 = 0$$
$$-2x_1 + 2i x_2 = 0 \quad / \cdot i$$

$$2i x_1 + 2x_2 = 0$$
$$-2i x_1 - 2x_2 = 0$$

$$2i x_1 = -2x_2 \quad /:2$$
$$i x_1 = -x_2$$
$$x_2 = -i x_1$$

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} s \\ -is \end{bmatrix}$, $s \neq 0$ svojstveni vektori koji odgovaraju svojstv. vrij. λ_1

Za $\lambda_2 = 3+2i$ imamo

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$
$$\begin{bmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tj.
$$-2i x_1 + 2x_2 = 0 \quad /:2$$
$$-2x_1 - 2i x_2 = 0$$

$$-i x_1 + x_2 = 0$$
$$x_2 = i x_1$$

$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} t \\ it \end{bmatrix}$, $t \neq 0$ svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_2.